**Преобразование выражений**

Тестовые задания на преобразование выражений на тестах ЕНТ, да еще при наличии ответов для выбора правильного среди них - этот тот материал, на котором можно сэкономить время. Как быстро и правильно решать такие задания - тема нашего урока.

Пример 1. Упростите: [cos(α + 32o) + cos(α - 28o)]/cos(88o - α)

1)-3;     2)√3;      3) √3/2;      4)-√3/2;      4) 1.
Решение. Хорошо тому, кто помнит формулу преобразования суммы косинусов в произведение. А если забыл ее (честнее - не знал, так как вовремя не выучил). Как быть в этом случае? На уроке математики, конечно, получите заслуженную "двойку", а при решении этого тестового задания можно выкрутиться.
Обратим внимание на то, что правильный ответ не должен зависеть от значения α. Тогда, подставив в данное выражение вместо α, например, 28о, получим (cos60o + 1)/cos60o. Шерлок Холмс в этой ситуации сказал бы, что задача решена - правильный ответ 2). Его верный друг Ваттсон, конечно, попросил бы объяснить этот странный выбор. Действительно, числитель полученного выражения cos60o + 1 явно больше 1, а его знаменатель cos60o - меньше 1 (дробь), а при делении числа на дробь результат увеличивается (это знают даже дети из 4-5 классов). Значит, ответ должен быть больше 1. Таковым является только ответ 2.
А вот еще один пример, рассчитанный такого ученика, который не теряется в любых ситуациях.

Пример 2. Найдите значение выражения (4y2 - 3xy + x2)/(x2 - xy + y2), если x/y = 2.

1) 2/3;     2)3/2;      3) 1;     4)-2/3      5) -3/2.

Здесь также в дело пустим ответы, которые явно говорят, что правильный ответ от х и y не зависит, лишь бы x/y = 2.

Поэтому подберем х и y так, чтобы x/y = 2, например, х = 2 и y = 1. Тогда данное выражение примет значение 2/3 (вычислите сами!). Значит, правильный ответ 1). И это все, могут спросить некоторые. Да, все, ответ найден.

Задания для самостоятельного решения

**Если учащийся только слушает, смотрит или читает готовые решения математических задач, то он сам никогда не научится их решать без посторонней помощи.**

Поэтому предлагаю две задачи для самостоятельного решения.

Пример 1. Упростите: (sin5α - sin3α)/(cos5α + cos3α).

1) -ctgα;     2) -tg4α;      3) tgα;     4) tg4α;      5) ctgα.

Пример 2. Вычислите значение дроби (3xz +x2 -2xy)/(4y2 - yz - 2z2) при условии, что x/z = -2, z/y = -1.

1) 1,6;     2) 2,5;      3) 3;     4) -1,5;      5) -2.

**Метод оценки**

Часто на экзамене ЕНТ предлагают вычислить значение некоторого числового выражения. Однако попытки провести вычисления в "лоб" могут привести а неверному ответу. Одной из причин этого являются слабые вычислительные навыки абитуриентов или допущенная в процессе решения оплошность в выкладках. В таких случаях предпочтительнее избрать другие способы.

Рассмотрим известный из математики прием - метод оценки данного выражения. Суть этого метода состоит в том, что значение искомого выражения А сравнивают с некоторым числом В. Пусть А > В. Если удастся доказать, что все предложенные ответы, кроме одного будут меньше В, то для выбора остается только один ответ. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример 1. Найдите значение выражения (4 + √6)/(4 - √6) + (4 - √6)/(4 + √6).

1)2;       2) 3√6/8 ;       3) 4,4 ;       4)(8 + √6)/4.

Решение. Очевидно, что (4 + √6)/(4 - √6) > (4 + 2)/2 = 3. Поэтому значение данного выражения будет больше 3. Этому условию не удовлетворяет первый из предложенных ответов. Так как 3√6/8 < 9/8 и (8 + √6)/4 < (8 + 3)/4 < 3, то ответы 2) и 4) также не являются верными. Поэтому для выбора остается только ответ 3).

Пример 2. Найдите значение выражения (11 - 4√7)0,5

1) √7 + 2;       2) √7 - 2;       3) √7 - 1;       4)2 - √7.

Решение. воспользуемся тем, что 4√7 =√102. Поэтому 0 < (11 - 4√7)0,5 = (11 - √102)0,5 < 1. Ответ 1) явно больше 2, а ответ 4) отрицательный. Значит, они неверные. Так как √7 - 1 > 2 - 1 = 1, то ответ 3) также неверный. Остается признать, что верным будет ответ 2).

Задания для самостоятельного решения

Пример 1. Упростите выражение 2√3 - 5 - 11/(√12 - 1).

1) 2√3 - 4;       2)4;       3)-4;       4) -6.

Пример 2. Упростите выражение 15√0,6 - 0,5√60 + 2√3,75.

1) 0;             2) √15;     3) 5√3;       4) 3√15.

**Метод симметрии**

Предварительно сделаю лишь одно чисто техническое примечание. В дальнейшем системы двух уравнений будут записываться в виде {<уравнение1> и <уравнение2>}.

Пример 1. Решите систему уравнений: {x3 + y3 = 7 и x3y3 = -8}.

1) (-2; 1), (-1 ; 2);      2) (-1; 3), (1 ; -1);      3) (2; -1), (-1 ; 1);    4) (2; 1), (-1 ; -2);      5) (-1; 2), (2 ; -1).
Решение. Представим себе, что Вы на экзамене ЕНТ и на предложенное выше задание мгновенно даете правильный ответ 5). Возможно ли такое?
Да, возможно! Просто нужно еще раз посмотреть внимательно на данную систему уравнений (поднимите голову и посмотрите на систему уравнений и запомните ее). Поговорка говорит: "Смотреть и видеть не одно и тоже!". Действительно, многие смотрели на эту систему и не увидели, что если поменять x на y, а y на х, то ничего в системе не изменится. В таких случаях говорят, что система уравнений симметрична относительно переменных x и y.
Что это дает в нашем конкретном случае? А то, что если пара (a; b) является решением данной системы, то и пара (b; a) - тоже решение этой системы уравнений. Как, например, в ответе 5). Остальные ответы 1), 2), 3) и 4) явно неверные, так как в них содержатся несимметричные пары чисел.
Вот и все решение, которое, как было обещано ранее, не требует никаких вычислений, выполняется устно и мгновенно.
Примечание. Хочу уберечь читателей от возможной ошибки. Пара вида (а; а) симметрична сама себе. Это надо учитывать при решении симметричных систем уравнений в тестовых заданиях. Так, если в одном из ответов была бы пара типа (а; а), а другие ответы не содержали бы симметричных пар чисел, то только этот ответ нужно было бы признать правильным.
А вот еще одна система уравнений, для решения которого полезно применить идею симметрии.
Пример 2. Решите систему уравнений: {x2 - 2|х| - 3 = 0 и x + y = 6}.

1)(-2; 8), (7 ; 5);      2)(4; 2), (-9 ; 6);      3) (3; 3), (-3 ; 9);     4) (-6; 12), (-3 ; 9);      5) (-3; 6), (9 ; 0).
Решение. Здесь, скажут некоторые, переменные х и y входят в систему несимметрично. Конечно, они правы! Однако симметрия в этой системе присутствует. Обратите внимание на первое уравнение. Функция, расположенная в ее левой части, является четной. Что дает это наблюдение для практики решения тестовых заданий? Да практически все. Это наше замечание позволяет решить данное тестовое задание "на вскидку", без карандаша и бумаги для математических выкладок.

Если некоторое число а будет решением первого уравнения, то и -а автоматически станет его решением. Поэтому ответы к этой задаче должны содержать пары вида (а; ...) и (-а; ...) или (0; ...) (0 = - 0). Поэтому все ответы кроме третьего неверны. Значит, верен только ответ 3).

Задания для самостоятельного решения

Пример 1. Решите систему уравнений: {x + y = -2 и x2 + y2 = 100}.

1) (-8; 6), (6 ; -8);      2) (-5; 6);      3) (-6; 5), (2 ; 8);         4) (-9; 4), (2 ; 7);    5) (4; 5), (6 ; -5).

Пример 2. Решите систему уравнений: {x - y = 4 и 3y2 - 2|y| - 1 = 0}.
1) (-3; -1), (5 ; -1);     2) (-3; 1), (-5; 1);     3) (3; -1), (5 ; 1);    4) (3; -1), (-5 ; -1);      5) (-3; 1), (5 ; 1).

**Тригонометрические выражения**

Тестовые задания по тригонометрии - самые трудные и нелюбимые школьниками. Почему? Причина проста. Школьники на хотят зубрить соответствующие формулы. А без формул в тригонометрии никуда. А можно ли решать тестовые (и не только) знания без формул?
Вообще говоря нельзя. Но если очень хочется, то можно. А если серьезно, то можно, но с одной оговоркой - только иногда. При этом в редких случаях. На сегодняшнем уроке разберем такие тестовые задания по тригонометрии.
**Пример 1**. Дано: tgα = 3/4, 0 < α < π/2. Вычислить sinα + 2cosα.
1) -10/5;      2) 10/5;      3) -11/5;             4) 11/5;      5) 7/5.
Вот как можно решить наше тестовое задание без всяких формул, используя только определение тангенса, косинуса и котангенса одного и того же угла. Так как 0 < α < π/2 (угол α - острый), то используем определение тригонометрических функций для острого угла из курса геометрии восьмого класса (кто не помнит - почитайте учебник геометрии).
Построим прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 (стройте сами без меня). Понятно, что это так называемый египетский треугольник, у которого гипотенуза равна 5 (кто в этом не уверен - вычислите гипотенузу по теореме Пифагора). Тогда sinα по определению равен отношению противолежащего катета (3) к гипотенузе (5), cosα - отношению прилежащего катета (4) к гипотенузе (5).
Поэтому sinα + 2cosα = 3/5 + 8/5 = 11/5. Значит, ответ 4 - правильный.
**Пример 2**. Дано: sinα = -3/5, π < α < 3π/2. Вычислите 2tgα + ctgα.
1) 25/12;      2) 17/6;      3) -25/12;             4) -17/6;      5) 25/6.
В координатной плоскости ХОУ построим окружность с радиусом 5 и на ней отметим точку с ординатой  -3.
Очевидно, что треугольник МАО - египетский. Поэтому МА = 4. Значит, точка М имеет координаты х = -4, у = -3.
По определению tgα = у/MO = 3/4, а ctgα = х/MO = 4/3. Поэтому 2tgα + ctgα = 3/2 + 4/3 = 17/6. Значит, правильный ответ 2.
А где же калькуляторное решение? Конечно, его можно реализовать. Однако не все так просто. В нашем случае угол α расположен в третьей четверти, а для этих случаев непосредственное применение калькулятора невозможно. Нужно помнить, что калькулятор удобно применять тогда, когда угол α расположен в первой четверти. Поэтому мы рассматривать калькуляторное решение не будем, так как оно потребует больше времени, чем то решение, которое приведено выше.

Задания для самостоятельного решения

Пример 1. Дано: sinα = 40/41, 0 < α < π/2. Вычислите tgα - ctgα.

1) 1681/360;      2) -1519/360;      3) -1681/360;

     4) 81/360;      5) 1519/360.

Пример 2. Дано: cosα = -3/5, π/2 < α < π. Вычислите tgα + sinα.

1) -8/15;      2) 8/15;      3) 32/15;             4) -32/15;      5) 31/20.